

# Pracownia fizyczna — analiza wyników pomiarów i ich niepewności.

---

## 1.1. Wstęp

Zjawiska zachodzące w przyrodzie opisywane są za pomocą odpowiednio zdefiniowanych pojęć zwanych *wielkościami fizycznymi*. Pewne wielkości zostały wybrane jako *podstawowe* (długość, masa, czas, natężenie prądu, temperatura, natężenie światła) i służą do określenia wszystkich innych wielkości fizycznych zwanych *wielkościami pochodnymi*. Pomiar wielkości fizycznych jest możliwy, gdy istnieje jednostka miary. Dla wielkości podstawowych jednostką miary jest dowolnie wybrany stan tej wielkości, któremu umownie przypisujemy wartość 1 i nazywamy go *wzorcem*.

Obowiązujący obecnie międzynarodowy układ jednostek, zwany w skrócie układem **SI**, oparty jest na następujących jednostkach podstawowych: metr (m), kilogram (kg), sekunda (s), amper (A), kelwin (K) oraz kandela (cd). Jednostkami uzupełniającymi są radian (rad) i steradian (sr).

Zajęcia w pracowni fizycznej, związane są z pomiarami wielkości fizycznych. Analiza pomiarów wielkości fizycznej musi zawierać wraz z wynikiem ocenę jego niepewności. Poniżej omówiono sposoby oceny niepewności pomiarowych oraz zawarto pewne praktyczne uwagi dotyczące opracowania i prezentacji uzyskanych wyników.

## 1.2. Charakterystyka niepewności pomiarowych

### 1.2.1. Znaczenie oceny niepewności

Wszystkie pomiary narażone są na występowanie różnych niepewności. Rachunek błędów polega na określeniu jak duże są te niepewności pomiarowe i na wskazaniu sposobu ich zmniejszenia, gdy jest to możliwe. W naukach przyrodniczych „*błąd pomiaru*” oznacza niemożliwą do uniknięcia *niepewność* związaną ze sposobem pomiaru i dalej obydwaj wyrazy będą traktowane wymiennie.

Wynik pomiaru bez oceny niepewności nie jest wielkością w pełni użyteczną. Powiedzmy, że uzyskaliśmy następujące wartości oporu, np. cewki indukcyjnej, w dwu różnych temperaturach:  $200,025\Omega$  dla  $10^\circ\text{C}$  i  $200,034\Omega$  dla  $20^\circ\text{C}$ . Przy tak zbliżonych danych nie jest możliwa odpowiedź na pytanie, czy opór tej cewki zależy od temperatury. Dopiero informacja o wielkości błędu pozwoli na sprecyzowanie odpowiedzi. Dlatego obok wyniku pomiaru zapisujemy jego przybliżony błąd, np. zmierzaliśmy napięcie prądu i podajemy wynik  $U = (135 \pm 5) \text{ V}$ . Oznacza to, że z określonym prawdopodobieństwem prawdziwa wartość napięcia zawiera się w przedziale od 130 V do 140 V.

### 1.2.2. Matematyczny zapis niepewności

Otrzymana w wyniku pomiaru wartość  $x$  wielkości fizycznej różni się od jej wartości rzeczywistej  $X$ . Liczbę  $\Delta x$ , która jest wartością bezwzględną różnicy  $(x - X)$  nazywamy *niepewnością* lub *błędem bezwzględnym* pomiaru wielkości mierzonej:

$$\Delta x = |x - X|.$$

Błąd ten wyrażony jest w takich samych jednostkach jak wielkość mierzona.

Niepewność  $\Delta x$  wskazuje na wiarygodność lub dokładność pomiaru:  $X = x \pm \Delta x$ . Jednak sama wartość  $\Delta x$  nie mówi wszystkiego. Niepewność jednego centymetra przy długości jednego kilometra sugeruje niezwykle precyzyjny pomiar, podczas gdy niepewność jednego centymetra przy odległości trzech centymetrów wskazuje na bardzo grube przybliżenie. Zatem, o jakości pomiaru nie decyduje sama tylko niepewność, ale także stosunek  $\Delta x$  do  $x$ . Prowadzi nas to do pojęcia niepewności względnej (inaczej błędu względnego).

Stosunek niepewności  $\Delta x$  do wartości bezwzględnej  $|x|$  nazywamy *błędem względnym*,  $\frac{\Delta x}{|x|}$ .

Błąd względny wyrażony w procentach nazywamy *błędem procentowym*  $B_p$ ,  $B_p = \frac{\Delta x}{|x|} \cdot 100\%$ .

W praktyce, wartości mierzone najczęściej są dodatnie ( $x > 0$ ) i oznaczenie wartości bezwzględnej może zostać pominięte. Niepewność względna jest wielkością niemianowaną. Na przykład pomiar  $l = 50 \pm 1$  cm ma niepewność względną  $\Delta l/l = 1/50 = 0,02$  i niepewność procentową 2%.

Zarówno błąd bezwzględny jak i względny w sposób ścisły nie może być wyznaczony, ponieważ nie znamy wartości rzeczywistej  $X$ , ale jesteśmy w stanie z rozsądnym prawdopodobieństwem stwierdzić, że  $X$  mieści się w przedziale

$$x - \Delta x \leq X \leq x + \Delta x.$$

### 1.2.3. Błędy przypadkowe i systematyczne

Jedną z najlepszych metod oceny wiarygodności pomiaru jest jego wielokrotne powtarzanie i badanie otrzymanych wyników. Nie wszystkie jednak rodzaje niepewności pomiarowych mogą być oceniane za pomocą statystycznej analizy wyników wielokrotnych. Z tego powodu niepewności pomiarowe dzielą się na dwie grupy: *niepewności przypadkowe*, które mogą być poddane analizie statystycznej i *niepewności systematyczne*, które takiej analizie nie mogą być poddane.

Błędy systematyczne są takie same w każdym pomiarze, przeprowadzanym w tych samych warunkach i zawsze przesuwają nasze wyniki względem wartości rzeczywistej w tę samą stronę. Wynikają one z wadliwie przygotowanego do pomiarów przyrządu (np. nie wyzerowana waga) bądź z nieuwzględnienia dodatkowych czynników zakłócających pomiary (np. rozszerzalność cieplna). Do błędów systematycznych można też zaliczyć niepewności, których źródłem jest precyzja stosowanego przyrządu, np. każdy pomiar suwmiarką daje taką samą niepewność równą 0,1 mm.

Z kolei błędy przypadkowe w kolejnych pomiarach (w tych samych warunkach) przybierają różne, przypadkowe wartości. Wynikają one z niedoskonałości ludzkich zmysłów i narzędzi pomiarowych. W praktyce błędy tego rodzaju zmniejszane są poprzez kilkakrotne powtórzenie tego samego pomiaru. Przypuśćmy, że mierzymy czas spadania kulki w cieczy na określonej drodze. Jeżeli stosujemy stoper o dużej dokładności, to źródłem błędu będzie czas naszej reakcji przy włączaniu i wyłączaniu stopera. Włączanie lub wyłączanie przedwczesne lub spóźnione jest jednakowo prawdopodobne, więc całkowity efekt ma *przypadkowy* charakter. Jeśli wielokrotnie powtarzamy pomiar, czasami zawyżamy wynik, a czasami go zaniżamy. Analizując metodami statystycznymi rozrzut tych wyników, możemy dostać bardzo wiarygodne oszacowanie tego rodzaju błędu. Z drugiej strony, jeśli nasz stoper stale się późni, to wszystkie pomiary czasu będą zaniżone i powtarzanie pomiaru (tym samym stoperem) nigdy nie ujawni źródła tego błędu systematycznego.

Wspomnijmy jeszcze, o tzw. *błędach grubych*, których źródłem jest nieuwaga eksperymentatora, np. źle odczytano wskazanie przyrządu. Wynik wówczas na tyle się różni od pozostałych, że łatwo można pomyłkę zauważyć i odrzucić.

## 1.3. Określanie niepewności pomiarowych

### 1.3.1. Porównanie wartości zmierzonych i wartości uznanych

Jeśli dwa pomiary tej samej wielkości nie zgadzają się ze sobą, to mówimy o *rozbieżności*. Liczbowo definiujemy rozbieżność pomiędzy wynikami pomiarów jako ich różnicę. Rozbieżność *nie jest znacząca*, jeśli jest ona mniejsza niż niepewność pomiarowa.

Na pracowni często mierzy się wielkości już wcześniej wielokrotnie precyzyjnie zmierzone i których bardzo dokładne wartości można znaleźć w tablicach — są to tzw. *wartości tablicowe*. Wartości te nie są pozbawione niepewności nie mniej jednak są one o wiele bardziej dokładne, niż mogą być wyznaczone przez studenta na pracowni fizycznej. Wartości tablicowe są traktowane jako *wartości uznane* danej wielkości fizycznej. Przykładowo, aktualnie uznana wartość prędkości światła równa jest  $c = 299\,792\,458 \pm 1$  m/s.

Najprostszym typem doświadczenia jest pomiar wielkości  $x$ , której wartość tablicową  $x_{tab}$  znamy. Jeśli wynik eksperymentu daje rozbieżność wartości zmierzonej i tablicowej w granicach niepewności pomiarowej  $\varepsilon$ , to możemy go uznać za zadowalający. Z drugiej strony, jeśli wartość uznana jest sporo

poza oszacowanym zakresem  $x - \varepsilon$  i  $x + \varepsilon$ , to istnieją uzasadnione obawy, że coś się nie udało i należy szukać źródeł pomyłki, sprawdzić swoje pomiary i obliczenia.

Przyczyn powstania błędu może być wiele. Mógł on wystąpić podczas pomiaru lub obliczeń, niewłaściwie mogła zostać oszacowana niepewność pomiarowa. Wynik pomiaru mógł wreszcie być porównywany z niewłaściwą wartością uznaną. Na przykład przeprowadziliśmy pomiar prędkości dźwięku w powietrzu i uzyskaliśmy wynik:  $v = 345 \pm 2 \text{ m/s}$ , podczas gdy tablicowa wartość prędkości dźwięku w powietrzu w warunkach normalnych ( $0^\circ\text{C}$ ,  $101,3 \text{ kPa}$ ) wynosi  $331 \text{ m/s}$ . Istnieje możliwość, że pomiaru nie przeprowadzono w temperaturze  $0^\circ\text{C}$ . Istotnie, jeśli pomiar wykonano w  $20^\circ\text{C}$ , to właściwa wartość prędkości dźwięku byłaby równa  $343 \text{ m/s}$  i wynik pomiaru byłby w zupełności zadowalający.

W końcu rozbieżność taka może wskazywać na pewne błędy systematyczne, których wykrycie będzie wymagać sprawdzenia warunków pomiarowych i kalibracji wszystkich przyrządów.

Rozbieżność naszego wyniku i wartości tablicowej wyrażamy obliczając błąd bezwzględny i względny w porównaniu do wartości tablicowej:

$$\Delta x_{tab} = |x - x_{tab}|, \quad B_p = \frac{\Delta x_{tab}}{x_{tab}} \cdot 100\%.$$

### 1.3.2. Niepewności w pomiarach bezpośrednich

Prawie wszystkie pomiary bezpośrednie wymagają odczytu na skali np. linijki, zegara, woltomierza. Niepewności w tym przypadku mogą być oszacowane całkiem prosto — w przypadku podziałki milimetrowej jako  $0,5 \text{ mm}$ , a jeżeli odległość kolejnych kresków podziałki jest odpowiednio duża, to przy odczycie stosujemy interpolację i dokładność odczytu może wynosić np. jedną piątą wartości najmniejszej podziałki. Niestety często występują inne źródła niepewności. Podczas pomiaru odległości pomiędzy dwoma punktami głównym problemem może być ustalenie, gdzie naprawdę znajdują się te punkty. Np. mierząc na ławie optycznej z podziałką milimetrową odległość obrazu od soczewki możemy mieć trudności w określeniu położenia środka soczewki, której grubość wynosi zwykle kilka milimetrów, a obraz może wydawać się ostry również na przestrzeni kilku milimetrów. Choć podziałka jest milimetrowa, to niepewność w tym przypadku może być rzędu centymetra.

Przyrządy wskazówkowe takie jak woltomierze czy amperomierze mają podaną tzw. *klasę*, która określa dokładność pomiaru jako procent zakresu pomiarowego przyrządu, zatem

$$\Delta x = \frac{\text{klasa} \cdot \text{zakres}}{100}.$$

Np., jeśli klasa woltomierza wynosi  $0,5\%$ , a zakres skali (maksymalna wartość, jaką możemy zmierzyć przy danym ustawieniu przełącznika zakresów) był  $300\text{V}$ , to niepewność  $\Delta U$  odczytu napięcia wynosi

$$\Delta U = \frac{0,5 \cdot 300 \text{ V}}{100} = 1,5 \text{ V};$$

każdy pomiar napięcia na tym zakresie obarczony jest takim samym błędem  $\pm 1,5 \text{ V}$ . Błąd względny maleje wraz ze wzrostem wychylenia wskazówki, dlatego należy tak dobrać zakres pomiarowy przyrządu, aby wychylenie wskazówki było możliwie duże.

W przypadku mierników cyfrowych dokładność podana jest w instrukcji przyrządu. Dokładność na ogół jest równa od  $1\%$  do  $3\%$  wartości wskazanej na wyświetlaczu plus kilka (na ogół 4 lub 5) jednostek pokazanych na ostatnim miejscu dziesiętnym. Jeżeli woltomierz cyfrowy wskazał napięcie np.  $25,16 \text{ V}$  a dokładność pomiaru wynosi  $2\% + 4 \text{ jedn. to}$

$$\Delta U = (0,02 \cdot 25,16 + 0,04) \text{ V} = (0,5032 + 0,04) \text{ V} = 0,5432 \text{ V} \approx 0,6 \text{ V}.$$

Zatem możemy przyjąć, że mierzone napięcie jest równe  $U = (25,2 \pm 0,6) \text{ V}$ .

Dokładny odczyt może dawać mylne wrażenie dokładności. Wyobraźmy sobie, że mierzymy czas spadku ciała z określonej wysokości. Na ogół różnice w kolejnych pomiarach czasu przekraczają

dokładność odczytu, co wynika z przypadkowości momentu, w którym uruchomimy i zakończymy pomiar czasu. W takich przypadkach, jeżeli pomiar może być powtarzany, to powinien być przeprowadzony wielokrotnie. Rozrzut wyników jest często dobrą wskazówką, co do niepewności a wartość średnia jest z reguły bardziej wiarygodna niż każdy z poszczególnych wyników. Metody analizy statystycznej wielokrotnych pomiarów będą omówione dalej.

Gdy pomiary wykonujemy kilkakrotnie, ale liczba pomiarów jest mała, np.  $n = 3$ , i ich rozbieżność jest większa niż dokładność odczytu, to miarą błędu może być maksymalna wartość z różnic pomiędzy wartością średnią, a każdym z wyników:

$$\Delta x = \max|\bar{x} - x_i|, \quad i = 1, 2, 3.$$

Jest jeszcze jeden, zupełnie inny rodzaj pomiarów, w których można prosto ocenić niepewność. Istnieją doświadczenia polegające na zliczaniu zdarzeń zachodzących w sposób przypadkowy, lecz ze ściśle określonym prawdopodobieństwem. Przykładowo, w próbce materiału promieniotwórczego każde pojedyncze jądro rozpada się w przypadkowym momencie, lecz istnieje określone średnie prawdopodobieństwo, z jakim możemy spodziewać się zarejestrowania rozpadu w całej próbce. Jeśli liczymy zdarzenia zachodzące w pewnym przedziale czasu  $T$  i dostajemy odpowiedź  $N$  to, zgodnie z teorią tego rodzaju zliczeń, nasz wynik jako miara spodziewanej średniej liczby zdarzeń w czasie  $T$  ma niepewność  $\sqrt{N}$ . Zatem, wynik oparty na tej jednej obserwacji powinien brzmieć

$$\text{średnia liczba zdarzeń w czasie } T = N \pm \sqrt{N}$$

Na przykład, jeśli w próbce uranu zliczamy 900 rozpadów w ciągu 100 s, to moglibyśmy stwierdzić, że średnio w próbce tej zachodzi  $900 \pm \sqrt{900} = 900 \pm 30$  rozpadów w stu sekundach.

### 1.3.3. Przenoszenie niepewności

Większość wielkości fizycznych nie da się określić na podstawie bezpośredniego pomiaru. Wyznacza się je natomiast w dwóch etapach. Na początku wykonuje się pomiar jednej lub kilku wielkości a następnie korzystając ze zmierzonych wartości  $x, y, \dots$ , oblicza się interesującą nas wartość *złożonej wielkości fizycznej*. Aby znaleźć np. opór elektryczny przewodnika mierzymy napięcie  $U$  przyłożone do jego końców i natężenie prądu  $I$  płynącego przez przewodnik a opór obliczamy:  $R = U/I$ .

Ponieważ prawie wszystkie doświadczenia składają się z bezpośredniego pomiaru i następujących po nich obliczeń — to i ocena niepewności również przebiega dwuetapowo. Po pierwsze należy ocenić niepewności wielkości mierzonych bezpośrednio, następnie zaś stwierdzić, w jaki sposób owe niepewności „przenoszą” się w trakcie obliczeń na niepewność ostatecznego wyniku.

### 1.3.4. Ogólna reguła przenoszenia niepewności — błąd maksymalny

Załóżmy, że złożona wielkość fizyczna  $A = f(x, y, z)$  jest funkcją trzech niezależnych zmiennych, którymi są proste wielkości fizyczne  $x, y, z$ , obarczone błędem pomiaru. We wzorach mogą występować również wielkości, których wartości bierzemy z tablic, np. przyspieszenie ziemskie czy ciepło właściwe i wówczas, najczęściej, nie uwzględniamy ich w rachunku błędów. W celu wyznaczenia maksymalnej niepewności  $\Delta A$  należy obliczyć zmianę funkcji  $f$ , spowodowaną niewielkimi zmianami jej argumentów —  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ . Wykonamy to *metodą różniczki zupełnej*.

Można uzasadnić wybór tej metody obliczania błędu, rozwijając w szereg Taylora funkcję  $A \pm \Delta A = f(x \pm \Delta x, y \pm \Delta y, z \pm \Delta z)$ , jednak dokładnego wyprowadzenia nie będziemy tutaj przytaczać.

Różniczkujemy funkcję  $A$ :

$$dA = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz.$$

Pochodne we wzorze powyższym są to pochodne cząstkowe (obliczamy je jak zwykle pochodne jednej zmiennej, czyli przy obliczaniu np. pochodnej cząstkowej funkcji  $A$  po zmiennej  $x$  pozostałe zmienne  $y$  i  $z$  traktujemy jako stałe parametry).

Aby obliczyć błąd bezwzględny  $\Delta A$ , zastępujemy różniczki zmiennych ich błędami bezwzględnymi (np. zamiast  $dx$  podstawiamy  $\Delta x$ ) i uwzględniamy tylko wartości bezwzględne pochodnych cząstkowych. Zakładamy w ten sposób przypadek najbardziej niekorzystny, w którym wszystkie błędy dodają się, choć w rzeczywistości mogły się częściowo kompensować, (dlatego mówimy o *błędzie maksymalnym*). Otrzymujemy wówczas następujący wzór przybliżony na błąd maksymalny złożonej wielkości fizycznej:

$$\Delta A = \left| \frac{\partial A}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial A}{\partial y} \right| \Delta y + \left| \frac{\partial A}{\partial z} \right| \Delta z. \quad (1)$$

Jeśli wielkość wyznaczana  $A$  jest iloczynem dowolnych potęg mierzonych wielkości,

$$A = C x^a y^b z^c, \quad (2)$$

metodę różniczki zupełnej możemy zastąpić tzw. *różniczkowaniem logarytmicznym*. Logarytmujemy obie strony równania (2),

$$\ln A = \ln C + a \ln x + b \ln y + c \ln z,$$

następnie różniczkujemy ten logarytm. Postępujemy dalej tak, jak w przypadku metody różniczki zupełnej i ostatecznie uzyskujemy następujące wyrażenie na maksymalny błąd względny  $\Delta A$ , dla wielkości  $A$  określonej równaniem (2):

$$\frac{\Delta A}{A} = \left| a \frac{\Delta x}{x} \right| + \left| b \frac{\Delta y}{y} \right| + \left| c \frac{\Delta z}{z} \right|. \quad (3)$$

Obliczony w ten sposób maksymalny błąd względny jest sumą błędów względnych mierzonych wielkości prostych, mnożonych przez współczynniki równe potędze, w jakiej poszczególne wielkości występują w wyrażeniu (2). Metoda ta ma tę zaletę, że oprócz znacznego uproszczenia obliczeń pozwala na szybką ocenę, która z wielkości mierzonych wnosi największy przyczynek do błędu końcowego. Powyższe rozważania mogą łatwo być rozszerzone na dowolną liczbę zmiennych.

Opisane metody obliczania błędu maksymalnego zilustrujemy dla kilku szczególnych, prostszych, przypadków i zastosujemy ją także do najbardziej ogólnego przykładu.

### 1.3.5. Szczególne przypadki przenoszenia niepewności

#### Sumy i różnice

Jeśli mamy dodać lub odjąć kilka liczb  $x, \dots, w$ , to stosując zależność (1) otrzymamy następującą regułę: Niepewność obliczonej wartości  $A = x + \dots + z - (u + \dots + w)$  jest sumą

$$\Delta A \approx \Delta x + \dots + \Delta z + \Delta u + \dots + \Delta w, \quad (4)$$

wszystkich pierwotnych niepewności. Innymi słowy, kiedy dodaje się lub odejmuje kilka wielkości, niepewności tych wielkości dodają się.

*Przykład* zastosowania tej reguły. Przypuśćmy, że eksperymentator miesza dwie cieczy z dwóch zlewek. Upřednio zważył zarówno pełne jak i puste zlewki i otrzymał następujące wyniki:

- Masa pierwszej zlewki z zawartością  $M_1 = 540 \pm 10$  g ;
- Masa pustej pierwszej zlewki  $m_1 = 72 \pm 1$  g ;
- Masa drugiej zlewki z zawartością  $M_2 = 940 \pm 20$  g ;
- Masa pustej drugiej zlewki  $m_2 = 97 \pm 1$  g .

Znajdujemy całkowitą masę zmieszanych cieczy:  $M = M_1 - m_1 + M_2 - m_2 = 1311$  g. Zgodnie z regułą (4) niepewność tego wyniku jest sumą wszystkich czterech niepewności,

$$\Delta M \approx \Delta M_1 + \Delta m_1 + \Delta M_2 + \Delta m_2 = 32 \text{ g}.$$

Ostateczna odpowiedź (właściwie zaokrąglona) brzmi: całkowita masa cieczy =  $1310 \pm 30$  g.

Warto zauważyć, że o wiele mniejsze niepewności wyznaczenia masy pustych zlewek wnoszą nieistotny wkład w ostateczną niepewność. Często z góry można określić, które z niepewności są nieistotne i mogą być od początku pominięte, co pomaga znacznie uprościć ich obliczanie.

## Iloczyny i ilorazy

Jeśli pewne wielkości  $x, \dots, w$  są mierzone z małymi niepewnościami  $\Delta x, \dots, \Delta w$ , zmierzone zaś wartości używane są do obliczenia wielkości  $A$ ,

$$A = \frac{x \cdot \dots \cdot z}{u \cdot \dots \cdot w},$$

to zgodnie z zależnością (3) niepewność względna obliczonej wartości  $A$  jest następującą sumą:

$$\frac{\Delta A}{A} \approx \frac{\Delta x}{|x|} + \dots + \frac{\Delta y}{|z|} + \frac{\Delta u}{|u|} + \dots + \frac{\Delta w}{|w|}. \quad (5)$$

Krótko mówiąc, kiedy mnoży się lub dzieli pewne wielkości, niepewności względne dodają się.

Na osobną wzmiankę zasługuje poniższy przypadek reguły (5).

**Iloczyn wielkości zmierzonej i dokładnej liczby.**

Jeśli wielkość  $x$  została zmierzona z niepewnością  $\Delta x$  i używana jest do obliczania iloczynu  $A = kx$ , gdzie  $k$  nie ma żadnej niepewności, to niepewność  $\Delta A$  równa jest iloczynowi  $|k|$  i niepewności  $x$ ,

$$\Delta A = |k| \cdot \Delta x. \quad (6)$$

Gdy na przykład zmierzmy grubość  $G$  stu kartek papieru i otrzymamy wynik  $G = 3,3 \pm 0,2$  cm, to natychmiast dochodzimy do wniosku, że grubość pojedynczej kartki

$$G_1 = \frac{1}{100} G = 0,033 \pm 0,002 \text{ cm}.$$

**Wyrażenia potęgowe.**

Jeśli wielkość  $x$ , zmierzona z niepewnością  $\Delta x$  jest używana do obliczenia wyrażenia potęgowego  $A = x^n$ , to zgodnie z zależnością (3) niepewność względna  $A$  jest  $|n|$  razy większa niż niepewność  $x$ :

$$\frac{\Delta A}{|A|} = |n| \cdot \frac{\Delta x}{|x|}. \quad (7)$$

Przypuśćmy, że znajdujemy przyspieszenie ziemskie  $g$  mierząc czas  $t$  spadku kamienia z wysokości  $h$ . Wykorzystujemy wzór  $g = 2h/t^2$ . Zgodnie z regułą (7) niepewność względna  $t^2$  jest dwa razy większa niż niepewność względna  $t$ . Zatem stosując regułę (5) dla iloczynów i ilorazów znajdujemy niepewność względną  $g$  podstawiając dane liczbowe do wzoru

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta h}{h} + 2 \frac{\Delta t}{t}.$$

**Wyrażenia zawierające wszystkie działania arytmetyczne.**

Ten przypadek wymaga stosowania metody różniczki zupełnej, co zilustrujemy poniżej.

Przy wyznaczaniu gęstości cieczy metodą piknometru otrzymujemy wzór

$$k_c = \frac{m_2 - m}{m_1 - m} k_w,$$

gdzie  $k_c$  – gęstość badanej cieczy,  $k_w$  – gęstość wody,  $m$  – masa samego piknometru,  $m_1$  – masa piknometru wypełnionego wodą,  $m_2$  – masa piknometru wypełnionego badaną cieczą. We wzorze na gęstość cieczy mamy trzy wielkości obarczone niepewnością pomiaru:  $m, m_1, m_2$ . Zatem,

$$\Delta k_c = \left| \frac{\partial k_c}{\partial m} \right| \Delta m + \left| \frac{\partial k_c}{\partial m_1} \right| \Delta m_1 + \left| \frac{\partial k_c}{\partial m_2} \right| \Delta m_2.$$

Obliczamy pochodne cząstkowe:  $\frac{\partial k_c}{\partial m} = -\frac{k_c - k_w}{m_1 - m}, \frac{\partial k_c}{\partial m_1} = -\frac{k_c}{m_1 - m}, \frac{\partial k_c}{\partial m_2} = -\frac{k_c}{m_2 - m}.$

Po podstawieniu do wzoru na  $\Delta k_c$  otrzymamy:

$$\Delta k_c = \frac{|k_c - k_w|}{m_1 - m} \Delta m + \left( \frac{\Delta m_1}{m_1 - m} + \frac{\Delta m_2}{m_2 - m} \right) k_c.$$

Występujące w tym wzorze niepewności  $\Delta m$ ,  $\Delta m_1$ ,  $\Delta m_2$  równe są dokładności ważenia.

### 1.3.6. Niepewności niezależne

Jeśli mierzone wielkości są niezależne (np. czas i droga), niepewności zaś mają charakter przypadkowy, to jest duża szansa na częściowe zniesienie się błędów, i że ostateczna niepewność będzie mniejsza niż zwykła suma niepewności lub niepewności względnych. Można w tym przypadku zastosować regułę „geometrycznego dodawania” niepewności — dodajemy kwadraty niepewności (dla sum lub różnic) lub kwadraty niepewności względnych (iloczyn i ilorazy) i wyciągamy pierwiastek z obliczonej sumy kwadratów.

Niepewność sumy i różnicy:  $A = x + \dots + z - (u + \dots + w)$

Jeśli wiadomo, że niepewności mierzonych wielkości są niezależne i przypadkowe, to niepewność obliczonej wartości  $A$  jest pierwiastkiem z sumy kwadratów niepewności początkowych:

$$\Delta A = \sqrt{(\Delta x)^2 + \dots + (\Delta z)^2 + (\Delta u)^2 + \dots + (\Delta w)^2}. \quad (8)$$

Przy tym spełniony jest warunek  $\Delta A \leq \Delta x + \dots + \Delta z + \Delta u + \dots + \Delta w$ .

Niepewność iloczynu i ilorazu:  $A = \frac{x \cdot \dots \cdot z}{u \cdot \dots \cdot w}$ .

Jeśli niepewności  $x, \dots, w$  są niezależne i przypadkowe, to względna niepewność obliczonej wartości  $A$  jest pierwiastkiem z sumy kwadratów początkowych wartości niepewności względnych

$$\frac{\Delta A}{|A|} \approx \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\Delta z}{z}\right)^2 + \left(\frac{\Delta u}{u}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\Delta w}{w}\right)^2}. \quad (9)$$

W każdym przypadku spełniona jest nierówność  $\frac{\Delta A}{A} \leq \frac{\Delta x}{|x|} + \dots + \frac{\Delta y}{|y|} + \frac{\Delta u}{|u|} + \dots + \frac{\Delta w}{|w|}$ .

**Przykład.** Załóżmy, że chcemy znaleźć sprawność grzejnika elektrycznego, używając go do ogrzania masy  $m$  wody o różnicę temperatury  $\delta t$ . Ciepło pobrane przez wodę o ciepłe właściwym  $c$  wynosi  $Q = c m \delta t$ , energia elektryczna dostarczona wynosi  $W = P \tau$ , gdzie  $P$  jest mocą prądu elektrycznego,  $\tau$  – czasem przepływu prądu. Sprawność jest określona wzorem

$$\eta = \frac{Q}{W} = \frac{m c \delta t}{P \tau}.$$

Założmy, że  $m$ ,  $\delta t$ ,  $\tau$  są mogą być zmierzone z dokładnością 1%, moc prądu zaś ma niepewność względną 5%. Przyjmujemy, że ciepło właściwe wody ma niepewność do zaniedbania. Jeśli teraz obliczymy niepewność zgodnie z regułą (5), otrzymamy niepewność

$$\frac{\Delta \eta}{\eta} \approx \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta(\delta t)}{\delta t} + \frac{\Delta P}{P} + \frac{\Delta \tau}{\tau} = (1 + 1 + 1 + 5)\% = 8\%.$$

Z drugiej strony, jeśli ufamy, że różne niepewności są niezależne i przypadkowe, możemy obliczyć  $\Delta \eta / \eta$  korzystając z reguły kwadratowego przenoszenia błędów i otrzymać

$$\frac{\Delta \eta}{\eta} \approx \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta(\delta t)}{\delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta P}{P}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \tau}{\tau}\right)^2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{28} \approx 5\%.$$

Wyraźnie widać, że reguła geometrycznego przenoszenia błędów prowadzi do znacząco mniejszej wartości niepewności procentowej. Co więcej widać, że niepewności takich wielkości jak  $m$ ,  $\delta t$ ,  $\tau$  nie dają istotnego wkładu do niepewności sprawności. Jest to spowodowane tym, że podnoszenie do

kwadratu dużych liczb znacznie zwiększa ich wpływ na niepewność końcową i zwykle możemy pozostałe kwadraty zaniedbać.

Przykład ten pokazuje, że zwykle lepiej i często łatwiej jest sumować błędy stosując regułę geometrycznego przenoszenia błędów. Pokazuje on także, w jakiego rodzaju zadaniach błędy są niezależne i uprawnione jest stosowanie tej reguły. Cztery zmierzone wielkości ( $m$ ,  $\delta t$ ,  $\tau$ ,  $P$ ) to różne wielkości fizyczne, mające różne jednostki i mierzone całkowicie różnymi sposobami — źródła błędów jakiegokolwiek z tych wielkości nie są skorelowane ze źródłami błędów którejkolwiek z pozostałych. Zatem uzasadnione jest traktowanie błędów jako niezależnych i obliczanie pierwiastka z sumy kwadratów.

#### Ogólna reguła przenoszenia błędów

Jeśli niepewności wyznaczenia  $x$ ,  $y$ ,  $z$  są niezależne i przypadkowe, to suma (2) zastępowana jest przez pierwiastek z sumy kwadratów

$$\Delta A = \sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial y} \Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial z} \Delta z\right)^2}. \quad (10)$$

Można łatwo sprawdzić, że ze wzorów (1) i (10) dadzą się wyprowadzić wszystkie reguły podane dla szczególnych przypadków.

### 1.4. Statystyczne opracowywanie wyników pomiarów

#### 1.4.1. Obliczanie błędu przypadkowego prostej wielkości fizycznej

W obecnych rozważaniach ograniczymy się do pomiarów *prostych wielkości fizycznych* (wynik odczytujemy bezpośrednio na przyrządzie), w przypadku, gdy błąd systematyczny możemy pominąć w porównaniu z błędem przypadkowym.

Powtarzając wielokrotnie pomiar tej samej wielkości, zauważamy rozrzut wyników wokół pewnej wartości, którą uznajemy za prawdziwą. Zwykle najlepszym przybliżeniem wartości prawdziwej jest *wartość średnia* uzyskanych wyników. Załóżmy, że przeprowadziliśmy  $n$  pomiarów tej samej wielkości fizycznej  $x$ . Otrzymane wartości z pomiarów to  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Wartość średnią otrzymujemy z dodania tych  $n$  wartości i podzielenia sumy przez liczbę pomiarów:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (11)$$

Niepewność pojedynczego pomiaru to wartość bezwzględna różnicy pomiędzy pomiarem  $x_i$ , a wartością prawdziwą  $X$ , której nie znamy. W praktyce obliczamy ją jako odchyłkę  $\Delta x_i$ , czyli wartość bezwzględną różnicy pomiędzy danym pomiarem, a wartością średnią:

$$\Delta x_i = |x_i - \bar{x}| \quad (12)$$

Odchyłkę tę utożsamiamy z błędem bezwzględnym  $i$ -tego pomiaru. Dla  $n$  pomiarów otrzymujemy  $n$  takich odchyłek. Wygodniejsze byłoby określenie jakiejś jednej odchyłki, uniwersalnej dla wszystkich  $n$  pomiarów. W tym celu najczęściej wyznaczamy dla danej serii wyników tzw. *odchylenie standardowe  $S$  pojedynczego pomiaru*. Odchylenie standardowe  $S$  obliczamy jako pierwiastek z sumy kwadratów odchyłek podzielonej przez liczbę pomiarów  $n$ , czyli:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (13)$$

Istnieje także inna definicja odchylenia standardowego. Pewne argumenty teoretyczne przemawiają za zamianą czynnika  $n$  w mianowniku wyrażenia (13) na  $n-1$  i za zdefiniowaniem odchylenia standardowego pomiarów  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — oznaczanego teraz jako  $\sigma_x$  — wzorem



$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} . \quad (14)$$

Modyfikacja powoduje, nieznaczne zwiększenie wartości  $\sigma_x$  względem  $S$ . Koryguje to tendencję niedoceniań niepewności pomiarów  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , szczególnie dla małej liczby pomiarów  $n$ .

Różnica pomiędzy odchyleniami standardowymi policzonymi za pomocą obu definicji jest liczbowo prawie zawsze nieznaczająca. W każdym przypadku powinno się powtarzać pomiar wielokrotnie, (co najmniej pięć razy, ale lepiej jeszcze więcej). Nawet, jeśli przeprowadzamy tylko 5 pomiarów  $N = 5$ , różnica pomiędzy  $\sqrt{N} = 2,2$  i  $\sqrt{N-1} = 2$  nie jest dla większości zastosowań znacząca. Niemniej najlepiej zawsze korzystać z bardziej ostrożnej definicji (14).

Tak obliczoną niepewność można już interpretować w kategoriach prawdopodobieństwa wystąpienia określonej wartości odchylenia danego pomiaru  $x_i$  od wartości rzeczywistej. Można udowodnić, że jeśli nasze pomiary podlegałyby tzw. *rozkładowi normalnemu* i jeśli powtarzalibyśmy pomiary  $x$  bardzo wiele razy, to 68,3% naszych wyników byłoby oddalone od  $\bar{x}$  o mniej niż  $\sigma_x$ , czyli prawie 70% wyników leżałoby w zakresie  $\bar{x} \pm \sigma_x$ . Możemy powiedzieć, że *istnieje prawdopodobieństwo 68,3%, że pojedynczy pomiar będzie się różnił od wartości od wartości średniej o mniej niż  $\sigma_x$* .

Znaczenie odchylenia standardowego  $\sigma_x$  w pomiarach, w których istotne są błędy przypadkowe jest dokładnie takie samo, jakie miała niepewność omówiona poprzednio. Za niepewność pomiaru wartości  $x$  można przyjąć  $\Delta x = \sigma_x$  i w wyniku takiego wyboru mamy prawie 70% ufności, że wynik naszego pomiaru różni się od wartości oczekiwanej o mniej, niż  $\Delta x$ .

Oczywiście wartość średnia  $\bar{x}$  powinna być znacznie bliższa wartości prawdziwej  $X$  niż większość poszczególnych wyników  $x_i$ . Istotnie, *błąd standardowy  $\sigma_{\bar{x}}$  wartości średniej jest  $\sqrt{n}$  razy mniejszy niż  $\sigma$  (uzasadnienie jest podane dalej):*

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sigma \Rightarrow \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum (\Delta x_i)^2} . \quad (15)$$

Tak więc, na skutek  $n$ -krotnego pomiaru dowolnej wielkości  $x$  mamy  $n$  liczb  $x_i$  i z nich obliczamy ostateczny wynik  $\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}$ . Zapis ten rozumiemy w ten sposób, że wartość  $\bar{x}$  różni się o  $\sigma_{\bar{x}}$  od wartości prawdziwej z prawdopodobieństwem 68,3%;  $\sigma_{\bar{x}}$  stanowi 68,3 procentowy przedział ufności. Zwiększając błąd dwukrotnie, do  $2\sigma_{\bar{x}}$ , dostajemy 95,45 procentowy przedział ufności.

**Przykład:** Dokonano serii pomiarów szerokości szkolnej linijki za pomocą suwmiarki, która pozwala zmierzyć z dokładnością do 0,1 mm. Otrzymano następujące rezultaty:

$$x_1 = 24,8 \text{ mm}, x_2 = 25,0 \text{ mm}, x_3 = 25,1 \text{ mm}, x_4 = 24,9 \text{ mm}, x_5 = 25,2 \text{ mm}, x_6 = 25,0 \text{ mm}, \\ x_7 = 24,9 \text{ mm}, x_8 = 25,2 \text{ mm}, x_9 = 25,1 \text{ mm}, x_{10} = 25,0 \text{ mm}, x_{11} = 24,9 \text{ mm}.$$

Średnia szerokość linijki wynosi:

$$\bar{x} = (24,8+25,0+25,1+24,9+25,2+25,0+24,9+25,2+25,1+25,0+24,9)/11 = 25,009.$$

Zaokrąglamy wynik do 25,01, czyli do liczby mającej o jedną cyfrę po przecinku więcej niż dokładność przyrządu pomiarowego. Następnie liczymy poszczególne odchyłki jako bezwzględną różnicę pomiędzy pomiarem  $x_i$ , a wartością  $\bar{x}$ :

$$\Delta x_1 = 0,21 \text{ mm}, \Delta x_2 = 0,01 \text{ mm}, \Delta x_3 = 0,09 \text{ mm}, \Delta x_4 = 0,11 \text{ mm}, \Delta x_5 = 0,19 \text{ mm}, \Delta x_6 = 0,01 \text{ mm}, \\ \Delta x_7 = 0,11 \text{ mm}, \Delta x_8 = 0,19 \text{ mm}, \Delta x_9 = 0,09 \text{ mm}, \Delta x_{10} = 0,01 \text{ mm}, \Delta x_{11} = 0,11 \text{ mm}.$$

Korzystając z (15) obliczamy błąd standardowy  $\sigma_{\bar{x}}$  średniej szerokości liniału:  $\sigma_{\bar{x}} = 0,035$  mm. Ostatecznie szerokość liniału zapisujemy jako:  $(25,01 \pm 0,04)$  mm. Otrzymane wielkości, jak już to podkreślano powyżej, należy interpretować w ten sposób, że prawdziwa szerokość liniału znajduje się w przedziale od 24,97 mm do 25,05 mm z prawdopodobieństwem bliskim 70%.

Ważną cechą odchylenia standardowego średniej jest  $\sqrt{n}$  w mianowniku. Jeśli przeprowadzilibyśmy więcej pomiarów to odchylenie standardowe  $\sigma_x$  pojedynczego pomiaru nie zmieniłoby się w sposób istotny natomiast odchylenie standardowe  $\sigma_{\bar{x}}$  średniej zmniejszałoby się powoli ze wzrostem  $n$  (jak  $\sqrt{n}$ ). Jest to zgodne z oczekiwaniami, że większa liczba pomiarów daje większą wiarygodność końcowego wyniku. Niestety czynnik  $\sqrt{N}$  rośnie dość wolno ze wzrostem  $N$ . Na przykład, jeśli chcielibyśmy poprawić naszą dokładność o rząd wielkości (10 razy), to musielibyśmy zwiększyć liczbę pomiarów o czynnik 100. Co więcej, w tych rozważaniach zaniedbujemy błędy systematyczne, a te nie zmniejszają się przy wzroście liczby pomiarów. Tak więc, w praktyce, jeśli chcemy w istotny sposób zwiększyć precyzję pomiarów powinniśmy raczej zmodyfikować technikę doświadczalną, niż polegać jedynie na wzroście liczby pomiarów.

#### 1.4.2. Obliczanie błędu przypadkowego złożonej wielkości fizycznej

Załóżmy, że złożona wielkość fizyczna  $A$  jest funkcją trzech niezależnych, prostych wielkości fizycznych  $x, y, z$ :

$$A = f(x, y, z). \quad (16)$$

Wielkości  $x, y, z$  wyznaczamy wielokrotnie i obliczamy ich wartości średnie  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  oraz odchylenia standardowe  $\sigma_{\bar{x}}, \sigma_{\bar{y}}, \sigma_{\bar{z}}$ . Można dowieść, że najlepszą wartość  $\bar{A}$  wielkości złożonej otrzymamy, jeśli podstawimy do (16) wartości średnie zmiennych niezależnych:

$$\bar{A} = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}).$$

Błąd średni kwadratowy  $\Delta A$  pomiaru  $\bar{A}$  obliczamy korzystając z reguły kwadratowego przenoszenia błędów:

$$\Delta A = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \sigma_{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \sigma_{\bar{y}}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \sigma_{\bar{z}}\right)^2} \quad (17)$$

Wzór (17) można uogólnić na dowolną liczbę zmiennych niezależnych.

**Przykład.** Powyższą metodę zastosujemy w przypadku funkcji jednej zmiennej, np. przy obliczaniu pola koła  $S$  w zależności od pomiarów średnicy  $\phi$ . Przypuśćmy, że w  $n$  pomiarach średnicy uzyskano uśredniony wynik:  $\phi \pm \Delta\phi$ , gdzie  $\Delta\phi = \sigma_{\bar{\phi}}$ . Ponieważ  $S = \frac{\pi\phi^2}{4}$ , więc

$$\Delta S = \left| \frac{\partial S}{\partial \phi} \right| \cdot \Delta\phi = \frac{\pi\phi}{2} \cdot \Delta\phi \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta S}{S} = 2 \frac{\Delta\phi}{\phi}.$$

#### 1.4.3. Uzasadnienie teoretyczne metod szacowania błędów przypadkowych

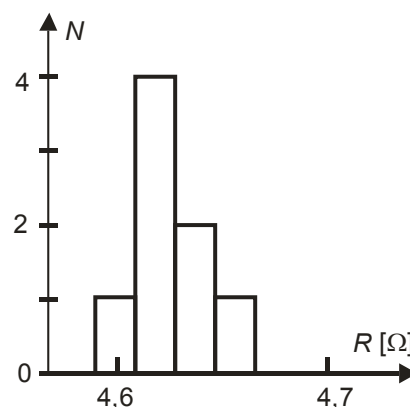
##### • Pojęcie rozkładu

Wielokrotnie mierząc dowolną wielkość fizyczną w ustalonych warunkach, np. 8 razy opór cewki za pomocą mostka Wheatstone'a, otrzymamy tzw. losowo wybraną próbkę  $n=8$  pomiarów spośród bardzo dużej liczby  $N$  możliwych wyników pomiarów, np:

4,615; 4,638; 4,597; 4,634; 4,613; 4,623; 4,659; 4,623  $\Omega$ .

Te  $n=8$  wyników można pogrupować w jednakowo szerokich przedziałach oporu i przedstawić w postaci słupkowego histogramu, jak to pokazano na rysunku.

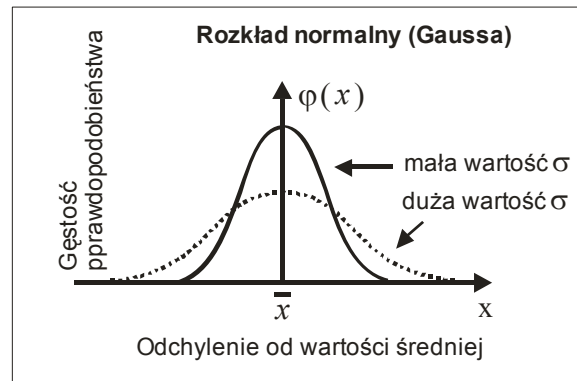
Histogram dla bardzo dużej liczby pomiarów  $N$  jest nazywany *rozkładem wartości wielkości mierzonej  $x$  wokół wartości średniej  $\bar{x}$* . Obwiednia takiego rozkładu może być opisana krzywą Gaussa, zwaną *krzywą rozkładu normalnego*, która ma jedno maksimum ze stosunkowo stromymi zboczami.



Taki kształt krzywej jest intuicyjnie łatwy do przewidzenia, gdyż pomiary dające wartości  $x$  coraz bardziej odległe od wartości  $x$  w maksimum rozkładu są coraz mniej prawdopodobne.

### • Rozkład Gaussa a wielkość błędu

Krzywą rozkładu zwykle normuje się, tzn. powierzchnię zawartą pomiędzy krzywą, a osią  $x$  przyrównuje się do jedności i taka unormowana krzywa nosi nazwę gęstości rozkładu  $\varphi(x)$ . Iloczyn  $\varphi(x) \cdot dx$  równy jest ułamkowi wszystkich pomiarów w przedziale od  $x$  do  $x + dx$ . Przebieg funkcji  $\varphi(x)$  najlepiej opisuje funkcja Gaussa, która ma postać następującą:



$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot \exp\left[-\frac{(x - X)^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (18)$$

$X$  oznacza wartość oczekiwaną  $x$ , a parametr  $\sigma$ , nazywany *dyspersją rozkładu normalnego*, jest miarą szerokości (rozrzutu) rozkładu. Tak określona funkcja  $\varphi(x)$  spełnia warunek unormowania, tj.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \cdot dx = 1 \quad (19)$$

Wartość średnią  $\bar{x}$  rozkładu, równą wartości  $x$  w maksimum funkcji  $\varphi$ , wyraża wzór:  $\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \varphi(x) \cdot dx$ . Przy bardzo dużej liczbie pomiarów wartość średnia  $\bar{x}$  staje się równa  $X$ .

### • Błąd standardowy pojedynczego pomiaru

Ściśle rzecz biorąc, niepewność  $\varepsilon$  pojedynczego pomiaru  $x$  równa jest różnicy pomiędzy tym pomiarem a wartością oczekiwaną  $X$ , a więc  $\varepsilon = x - X$ . Średnia kwadratów odchyłeń,  $\overline{\varepsilon^2}$ , dla rozkładu opisanego funkcją  $\varphi(x)$ , może być wyrażona całką definiującą wartość średnią:

$$\overline{\varepsilon^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - X)^2 \varphi(x) \cdot dx. \quad (20)$$

Po obliczeniu całki (20) dla rozkładu Gaussa otrzymamy równość

$$\sigma^2 = \overline{\varepsilon^2}. \quad (21)$$

Zatem średnia  $\overline{\varepsilon^2}$  jest równa kwadratowi dyspersji  $\sigma$ , co oznacza, że dyspersja  $\sigma$  rozkładu normalnego jest miarą błędu pojedynczego pomiaru.

Zgodnie z równaniem (21), dyspersja  $\sigma$  wyraża odchylenie standardowe  $S$  zdefiniowane wzorem (13). Jednak w rzeczywistości nie znamy wartości oczekiwanej  $X$  i w konkretnych obliczeniach zastępujemy ją wartością średnią  $\bar{x}$ . Dlatego, aby uniknąć niedoszacowania szerokości rozkładu do obliczenia odchylenia standardowego stosujemy wzór (14).

Błąd wartości średniej  $\bar{x}$  jest oczywiście mniejszy niż błąd pojedynczego pomiaru i wyznacza go liczba  $\sigma_{\bar{x}}$ , którą również można znaleźć. Jeśli wykonamy dużą liczbę serii pomiarów o tej samej liczbie  $n$  pojedynczych pomiarów, to dla każdej z tych serii można obliczyć błąd wartości średniej  $E = \bar{x} - X$  i kwadrat tego błędu  $E^2$ . Po obliczeniu średniej ze wszystkich wartości  $E^2$  uzyskujemy:

$$\overline{E^2} = \frac{1}{n} \overline{\varepsilon^2}. \quad (22)$$

Ponieważ, podobnie jak w przypadku zależności (21), obliczenie odpowiedniej całki daje wynik:  $\sigma_{\bar{x}}^2 = \overline{E^2}$ , po uwzględnieniu (21) oraz (22) otrzymamy:  $\sigma_{\bar{x}} = \sigma / \sqrt{n}$ .

Z równości tej wnioskujemy, że odchylenie standardowe wartości średniej dla  $n$  pomiarów jest  $\sqrt{n}$  razy mniejsze od odchylenia standardowego pojedynczego pomiaru.

### • Całkowa funkcja rozkładu

Funkcja Gaussa rozkładu normalnego przedstawia rozkład gęstości prawdopodobieństwa. Wartość całki z tej funkcji, obliczona w przedziale od  $-\varepsilon$  do  $\varepsilon$ , (wprowadzamy oznaczenie  $y = x - X$ ) określa prawdopodobieństwo zajścia zdarzeń o wartości  $y$  od zera do  $\varepsilon$ . W wyniku tego całkowania otrzymujemy tzw. całkową funkcję Gaussa  $\Phi(\varepsilon)$ :

$$\Phi(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \exp(-y^2/2\sigma^2) dy.$$

Przedstawimy  $\Phi(\varepsilon)$  w innej postaci, zamieniając zmienną całkowania  $y$  przez zmienną  $t = y/\sigma$ . Wówczas całkową funkcję  $\Phi(z)$ , gdzie  $z = \varepsilon/\sigma$ , przyjmuje prostszą postać:

$$\Phi(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^z \exp(-t^2/2) dt.$$

Funkcja  $\Phi(z)$  pozwala znaleźć prawdopodobieństwo dla różnych wartości  $z$ . W szczególności dla  $z = 1$ ,  $\Phi(z)$  równa się 0,683. Wynik ten jest uzasadnieniem twierdzenia, że wartość oczekiwana znajduje się z prawdopodobieństwem 68,3 % w przedziale od  $-\sigma$  do  $\sigma$  wokół wartości średniej. Przedziałowi o podwójnej szerokości odpowiada  $z = 2$  i wówczas dostajemy znaną już nam wartość  $\Phi(2) = 0,954$  (prawdopodobieństwo 95,4%). Prawdopodobieństwa otrzymania wyniku leżącego w danym przedziale wokół wartości oczekiwanej  $X$  zebrano w poniższej tabeli.

Przedział	Szansa otrzymania wyniku
$\langle X - \sigma, X + \sigma \rangle$	68,3%
$\langle X - 2\sigma, X + 2\sigma \rangle$	95,5%
$\langle X - 3\sigma, X + 3\sigma \rangle$	99,7%

## 1.5. Opracowywanie wyników

### 1.5.1. Prowadzenie notatek pomiarowych

Bardzo ważne jest prowadzenie notatek dotyczących przeprowadzanych pomiarów. Zapisy, powinny być prowadzone na bieżąco i czytelnie. Odpowiednie notatki uzupełnione obliczeniami końcowymi i niewielką dyskusją uzyskanych wyników stanowią dobry sprawdzian samodzielności pracy.

Należy zwrócić uwagę na zapisywanie obok liczb ich mian oraz stosowanych zakresów pomiarowych miernika. Przed zapisem wartości liczbowej należy upewnić się, czy właściwie zostało odczytane wskazanie przyrządu. W razie błędnego zapisu nie przeprawiać go, lecz przekreślić i nowe cyfry zapisać obok. W przypadku wielu pomiarów, rezultaty najlepiej gromadzić w tabeli z wyraźnie opisanymi kolumnami. Bardzo poprawiają przejrzystość notatek wszelkiego rodzaju rysunki objaśniające szczegóły doświadczenia.

### 1.5.2. Obliczenia końcowe

Przy obliczaniu wartości złożonej funkcji rozbijamy ją na prostsze wyrażenia składowe i liczymy je oddzielnie, umieszczając wartości tych wyrażeń w kolumnach odpowiedniej tabeli. Dopiero z tych wartości pośrednich obliczamy wyniki końcowe. W razie podejrzeń o błąd łatwiej wówczas zauważyć gdzie popełniliśmy pomyłkę.

Z reguły kalkulator wyświetla 8 do 10 cyfr znaczących. Jednak jest to pozorna dokładność. W eksperymencie bardzo rzadko udaje się uzyskać tak dużą dokładność, o czym wspominaliśmy już wcześniej przy okazji dyskusji błędów. Uzyskany wynik obliczeń należy podawać w odpowiednio dobranych jednostkach i z odpowiednią liczbą cyfr znaczących.

Cyframi znaczącymi danej liczby są wszystkie jej cyfry z wyjątkiem początkowych zer, np. liczba 64,002 ma 5 cyfr znaczących (6, 4, 0, 0, 2), liczba 0,0049 ma dwie cyfry znaczące (4, 9). Zera wewnętrzne są cyframi znaczącymi, a zera końcowe są znaczące, gdy znajdują się w liczbie z przecinkiem dziesiętnym. Na przykład liczbę 500 możemy zapisać jako  $5 \cdot 10^2$  i ma ona wówczas jedną cyfrę znaczącą — jeśli chcemy zaznaczyć, że ma ona trzy cyfry znaczące, należy ją zapisać w postaci  $5,00 \cdot 10^2$ . Zera będących miejscami znaczącymi nie należy opuszczać.

Niepewności powinny być zwykle zaokrąglane do jednej cyfry znaczącej. Od reguły tej jest jeden istotny wyjątek. Otóż, jeśli pierwszą cyfrą znaczącą niepewności jest 1 ewentualnie 2, to lepiej jest zachować dwie cyfry znaczące zamiast jednej. Przypuśćmy, że nasze obliczenia dają niepewność  $\Delta x = 0,14$ . Zaokrąglenie tej wartości do  $\Delta x = 0,1$  prowadziło by do 40% zmniejszenia niepewności i mniej mylące jest pozostawienie dwóch cyfr znaczących (0,14).

Kiedy już oceniliśmy niepewność pomiaru należałoby się zastanowić nad cyframi znaczącymi mierzonej wielkości. Wynik podany jako  $v = 6051,78 \pm 30$  m/s zapisany jest niewłaściwie. Niepewność 30 m/s oznacza, że zamiast cyfry 5 na trzecim miejscu liczby 6051,78 mogłoby by się znaleźć 2 lub 8. Jasne jest zatem, że ostatnie cyfry 1, 7 oraz 8 nie mają zupełnie znaczenia i powinny zniknąć po zaokrągleniu. Poprawny zapis tego wyniku powinien wyglądać następująco:  $v = 6050 \pm 30$  m/s.

Wynik obliczeń zaokrąglamy w ten sposób, że ostatnia cyfra, która została po opuszczeniu cyfr końcowych nie ulega zmianie, jeśli następują po niej cyfry od 0 do 4, a zwiększamy ją o 1, gdy następują po niej cyfry od 5 do 9.

*Reguła podawania wyniku końcowego:* Ostatnia cyfra znacząca w każdym wyniku powinna zwykle być tego samego rzędu (stać na tym samym miejscu dziesiętnym), co niepewność. Liczby używane w obliczeniach powinny mieć jednak generalnie jedną cyfrę znaczącą więcej niż te podawane ostatecznie. Zmniejsza to niedokładności wprowadzane podczas zaokrąglania liczb. Jeśli pierwsza cyfra niepewności jest mała (1 lub być może 2), to właściwe jest pozostawienie w odpowiedzi jeszcze jednej cyfry znaczącej. Przykładowo, wynik taki jak  $l = 27,6 \pm 1$  cm jest zapisany sensownie. Zaokrąglenie do  $28 \pm 1$  cm spowodowałoby utratę istotnej części informacji.

Jednostki, danej wielkości fizycznej (np.  $\text{m/s}^2$ ,  $\text{mm}^2$ ), podajemy na końcu wyniku, po zapisaniu niepewności, jak to jest w przedstawionych przykładach liczbowych. Także, jeśli mierzona wartość jest tak duża (lub tak mała), że wymaga zastosowania zapisu wykładniczego, to prościej i czytelniej jest podać odpowiedź i niepewność w tej samej formie np.:  $q = (1,61 \pm 0,05) \cdot 10^{-19}$  C.

A oto kilka przykładów poprawnego zapisu wyników końcowych:

<u>Przed zaokrągleniem</u>	<u>Po zaokrągleniu</u>
$v = (6,3219 \pm 0,0171) \cdot 10^4$ m/s	$v = (63,22 \pm 0,18) \cdot 10^3$ m/s.
$v = (23,3659 \pm 0,0185) \cdot 10^4$ m/s	$v = (233,7 \pm 0,2) \cdot 10^3$ m/s
$m = (212,421 \pm 0,115)$ g	$m = (212,42 \pm 0,12)$ g
$m = (0,036251 \pm 0,000111)$ g	$m = (36,25 \pm 0,12)$ mg
$C = (85,274 \pm 0,321) \cdot 10^{-3}$ $\mu\text{F}$	$C = (85,27 \pm 0,33) \cdot \text{nF}$
$I = (257,67 \pm 0,79)$ $\mu\text{A}$	$I = (257,7 \pm 0,8)$ $\mu\text{A}$
$V = (256,135 \pm 0,069)$ $\text{cm}^3$	$V = (256,14 \pm 0,07)$ $\text{cm}^3$ .

### 1.5.3. Uwagi dotyczące sporządzania wykresów

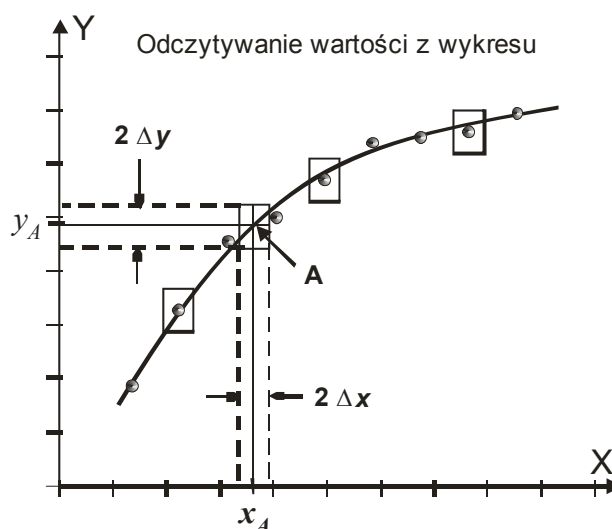
Wyniki pomiarów często przedstawiane są w postaci wykresu. Wykres jest potrzebny do wyznaczenia wielkości bezpośrednio niemierzalnej, jak np. półokres rozpadu otrzymywany z krzywej rozpadu źródła radioaktywnego. Podobnie temperaturę krzepnięcia wyznaczamy z przebiegu krzywej stygnięcia ciała. Wykresy służą również do sporządzania krzywych kalibracyjnych. Na przykład, przy badaniu nieznanego widma za pomocą spektrometru wykonujemy najpierw tzw. *krzywą dyspersji*, czyli wykres zależności znanych długości linii widmowych pierwiastków od położenia tych linii na skali spektrometru.

Wykresy rysujemy najczęściej na papierze milimetrowym ze skalą liniową. Gdy zależność ma charakter logarytmiczny lub wykładniczy ( $y = a \cdot b^x$ ), wygodnie jest posługiwać się papierem półlogarytmicznym, (z podziałką liniową wzdłuż osi  $x$  i logarytmiczną na osi  $y$ ).

Wzdłuż osi poziomej odkładamy zmienną niezależną (*przyczynę*), tj. wielkość, której wartości sami dobieramy, a wzdłuż osi pionowej — zmienną zależną (*skutek*), tj. tę, której wartości wyznaczamy. Obie osie powinny być oznaczone symbolem lub nazwą zmiennej wraz z nazwą lub symbolem jednostki, w jakiej jest ona wyrażona. Dobieramy skalę na osiach tak, aby można było łatwo odczytać współrzędne dowolnego punktu z dokładnością równą, co najmniej dokładności przeprowadzonych pomiarów — podziałki skali wyraźnie zaznaczamy. Wykres nie powinien być ani zbyt „stromy”, ani zbyt „płaski”. Podziałki nie muszą rozpoczynać się od zera.

Po dobraniu skali i narysowaniu osi współrzędnych nanosimy dane pomiarowe (na powierzchni wykresu, nie na osiach współrzędnych). Zaznaczamy je krzyżykami, kółkami lub innymi figurami geometrycznymi, które będą widoczne na tle przeprowadzonej krzywej. Położenie punktu pomiarowego powinno znajdować się w środku geometrycznym figury i może dodatkowo być oznaczone kropką. Następną czynnością jest zaznaczenie błędów pomiaru  $\Delta x$  i  $\Delta y$  poprzez np. otoczenie kilku punktów pomiarowych prostokątami o bokach  $2\Delta x$  i  $2\Delta y$ .

Ostatnią czynnością jest wykreślenie samej krzywej. Krzywą wykreślamy najlepiej za pomocą krzywika. Krzywa nie musi przebiegać dokładnie przez wszystkie punkty pomiarowe, ale powinna przecinać ich prostokąty błędów; wykresów nie wykonujemy poprzez łączenie punktów pomiarowych odcinkami. Liczba punktów znajdujących się po prawej i po lewej stronie krzywej powinna być w miarę możliwości równa. Może się zdarzyć, że któryś z punktów leży w znacznej odległości od krzywej, wzdłuż której układają się pozostałe punkty — wtedy pomijamy go, gdy pomiary dotyczą zjawiska znanego (przyjmujemy, że jest on obarczony błędem grubym). W przeciwnym razie należy wykonać dodatkowe pomiary.



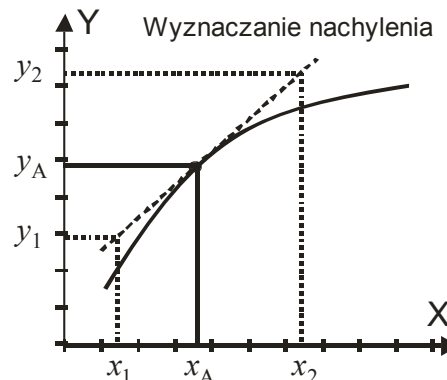
#### 1.5.4. Odczytywanie wartości z wykresu i wyznaczanie nachylenia krzywej

Na podstawie sporządzonego wykresu można wyznaczyć jedną ze zmiennych, gdy znana jest druga. Przyjmujemy, że maksymalna niepewność współrzędnych dowolnego punktu leżącego na krzywej nie przekracza błędów, jakim obarczone były punkty pomiarowe a więc punkt  $A$  leżący na krzywej, o współrzędnych  $(x_A, y_A)$ , otoczony jest takim samym prostokątem błędów jak każdy punkt pomiarowy. Wartość  $x_A$  odczytana dla określonej wartości  $y_A$  jest obarczona niepewnością  $\Delta x$ .

Nachyleniem  $a$  krzywej (stycznej do krzywej w danym punkcie) nazywamy stosunek przyrostu  $\Delta y = y_2 - y_1$  do odpowiadającego mu przyrostu  $\Delta x = x_2 - x_1$ :

$$a = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1). \quad (24)$$

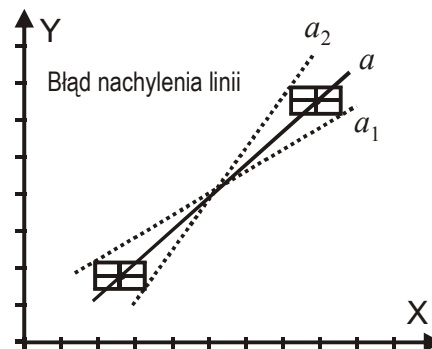
W granicznym przypadku, gdy  $(x_2 - x_1)$  dąży do zera, nachylenie jest równe pochodnej  $y$  względem  $x$ . Jednak nachylenie krzywej, mimo podobieństwa do tangensa kąta nachylenia, jest najczęściej wielkością mianowaną i nie można jej interpretować jako tangensa kąta zmierzonego na wykresie. W przypadku, gdy punkty pomiarowe  $(x_i, y_i)$  wskazują na zależność liniową,  $y = ax + b$ , nachylenie prostej można wyznaczyć metodą



najmniejszych kwadratów (tutaj nie omawiamy tej metody) lub, mniej dokładnie, po wykonaniu wykresu korzystając ze wzoru (24).

W celu wyznaczenia błędu  $\Delta a$  nachylenia należy określić dwie skrajne wartości nachylenia, związane z prostokątami błędów zaznaczonymi na początku i na końcu prostoliniowego odcinka krzywej. Jako rzeczywiste nachylenie  $a$  przyjmujemy średnią arytmetyczną  $a = (a_1 + a_2)/2$ . Błąd maksymalny nachylenia jest równy połowie różnicy dwóch skrajnych wartości nachylenia:

$$\Delta a = |a_1 - a_2|/2.$$

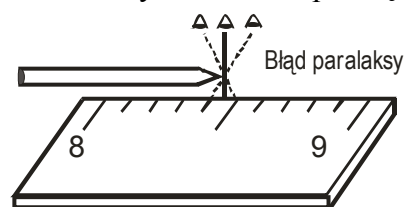


## 1.6. Elementarne przyrządy pomiarowe

W każdym laboratorium znajdują się, oprócz aparatury wyspecjalizowanej, przyrządy uniwersalne, jak linijka, suwmiarka, mikrometr, waga, amperomierz czy woltomierz. Ponieważ przyrządy te są używane bardzo często, niezależnie od wykonywanego zadania, warto zapoznać się z ich zasadą działania i obsługą.

### • Linijka

Linijka pozwala na pomiar długości z dokładnością do 0,5 mm a nawet, przy starannym pomiarze, do 0,2 mm. Trzeba przy tym unikać pewnych uchybień metodycznych. Należy do nich np. *błąd paralaksy*. Można go popełnić, gdy linijka podczas pomiaru jest nieco oddalona od mierzonego przedmiotu, a odczyt jest dokonywany pod kątem różnym od prostego — zależnie od kąta obserwacji odczytujemy różne wartości. Błędów tego można uniknąć przez maksymalne zbliżenie linijki do mierzonego przedmiotu bądź też przystawienie zwierciadła do skali linijki i porównanie położenia końca obrazu przedmiotu z rysami na linijce.



Błąd paralaksy może być popełniony również i w przypadku innych przyrządów, gdy odczyt polega na ustaleniu położenia wskazówki względem skali nieco oddalonej od płaszczyzny ruchu wskazówki.

Bywa, że początek linijki jest uszkodzony i wówczas, w celu uniknięcia tzw. *błędu zera*, przykładamy linijkę do przedmiotu w taki sposób, aby położenie obu końców przedmiotu trzeba było odczytywać — wynik uzyskamy przez odjęcie tych dwu odczytów.

Niekiedy skala umieszczona na linijce jest wadliwa na skutek deformacji materiału albo niestarannego wykonania i przy odpowiedzialnych pomiarach należy wytypowaną do pomiarów linijkę porównać z inną. Czynność taką nazywamy kalibracją przymiaru.

### • Suwmiarka

Suwmiarka jest uniwersalnym przyrządem służącym do pomiaru wymiarów liniowych z dokładnością do 0,1 mm. Suwmiarkę stanowią dwie metalowe skale, z których jedna daje się przesuwac wzdłuż drugiej. Na początku obu skal znajdują się płaszczyzny szczęk, między którymi umieszczamy mierzony przedmiot. Suwmiarką o odpowiednim kształcie szczęk można mierzyć również wymiary wewnętrzne otworów — należy szczęki suwmiarki włożyć do wnętrza otworu tak, aby dotykały ścianek. Bolcem wysuwającym się przy rozsuwaniu szczęk możemy mierzyć głębokość ślepego otworu. Skala nieruchoma posiada zwykle podziałkę milimetrową. Skala ruchoma, zwana noniuszem, posiada dziesięć podziałek zaznaczonych na odcinku równym 9 mm, zatem jedna podziałka noniusza różni się od jednej podziałki skali głównej o 0,1 mm. Dzięki temu przesunięcie początku noniusza względem kreski skali milimetrowej np. o 0,3 mm spowoduje, wyrównanie się trzeciej kreski noniusza z jedną z kresk skali głównej. Odczytu całkowitej liczby milimetrów dokonujemy na skali nieruchomej w miejscu gdzie rozpoczyna się skala noniusza, zaś kreska skali noniusza zgodna z dowolną kreską skali głównej umożliwia odczyt dziesiątych części milimetra, powyżej określonej już całkowitej liczby milimetrów. Suwmiarki z noniuszem zawierającym 20 rys pozwalają na dokonanie pomiarów nawet z dokładnością do 0,05 mm.

W przypadku niektórych suwmiarek, gdy szczęki są tylko po jednej stronie skali liniowej, przy pomiarze wymiarów wewnętrznych, np. średnicy wewnętrznej obręczy, należy do odczytu dodać wartość równą szerokości szczęk (na ogół 10 mm). Odczyt na skali dotyczy odległości pomiędzy płaszczyznami wewnętrznymi szczęk, a średnica wewnętrzna jest o szerokość szczęk większa.

Zasadę noniusa wykorzystuje się też do skal służących do pomiaru kątów (np. w polarymetrze czy spektrometrze).

#### • Śruba mikrometryczna

Śruba mikrometryczna, lub krócej mikrometr, pozwala na łatwe dokonanie pomiaru wymiarów liniowych z dokładnością do 0,01 mm (10  $\mu\text{m}$ ). Przyrząd ten. Mierzony przedmiot (o wymiarach nie przekraczających 100 mm) umieszczamy pomiędzy szczękami mikrometru. Następnie na osi śruby odczytujemy milimetry, a setne części milimetra na skali obrotowej umieszczonej na bębnie. Jeżeli obwód bębna jest podzielony na 50 części to jeden pełny obrót oznacza przesunięcie (skok śruby) o 0,5 mm — przy podziale na 100 części skok wynosi 1 mm.

Śruba zaopatrzona jest w czujnik, tzn. urządzenie zapewniające zawsze ten sam nacisk i zabezpieczenie mierzony przedmiot przed uszkodzeniem, a śrubę przed przesuwaniem się jej punktu zerowego. Mimo tego punkt zerowy może ulegać z czasem pewnemu przesunięciu. Dlatego przed pomiarem należy sprawdzić odczyt na śrubie przy zetknięciu szczęk i po pomiarze uwzględnić ewentualną poprawkę z odpowiednim znakiem.

#### • Waga laboratoryjna.

Pomiar masy, czyli po prostu ważenie, na wadze belkowej polega na porównywaniu dwu ciężarów przy użyciu dźwigni dwuramiennej. W przypadku wagi sprężynowej ciężar ciała jest proporcjonalny do ugięcia sprężyny (prawo Hooke'a). Do określenia masy wykorzystujemy proporcjonalność masy do ciężaru, przy czym współczynnikiem proporcjonalności jest przyspieszenie grawitacyjne (dla obszaru Polski wynosi ono  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ).

Najważniejszą częścią wagi belkowej jest podparta po środku sztywna belka, na której końcach, na specjalnych pryzmatach, są zawieszona szalki. W punkcie podparcia jest umocowana wskazówka, poruszająca się na tle skali, która pokazuje wielkość nachylenia belki. Dla zabezpieczenia pryzmatów przed szybkim zużyciem, waga jest zaopatrzona w urządzenie blokujące tzn. zatrzymujące działanie wagi, którym podnosi się belkę wagi z podparcia i jednocześnie uchwyty szalek z pryzmatów bocznych. Odważniki i ważoną masę nakładamy na szalki przy zablokowanej wadze. Wagę należy odblokować tylko na czas porównywania ciężaru badanego ciała z ciężarem odważników. Drobne odważniki należy ujmować szczypcami.

Przystępujemy do ważenia, gdy waga jest wypoziomowana (możemy poprawić ustawienie wagi wkręcając lub wykręcając odpowiednie nóżki w podstawce wagi). Uruchomiona waga powinna przyjąć położenie zerowe. Jako położenie zerowe przyjmuje się rysę na skali, wokół której waha się wskazówka wagi nieobciążonej lub równo obciążonej na obu szalkach. Jeżeli odchylenie położenia zerowego jest większe niż dwie podziałki od środka skali, wagę należy wyregulować, wyrównać długości ramion belki (przez wkręcanie lub wykręcanie nakrętek regulacyjnych). Również odczytu masy dokonujemy po uzyskaniu przez obciążoną wagę położenia zerowego.

Każdą wagę cechują dwa najważniejsze parametry — są nimi dokładność i czułość. Dokładnością wagi nazywamy wielkość najmniejszego odważnika, który jeszcze powoduje zmianę położenia wskazówki. Do ważenia ciał o większej masie stosuje się wagi o bardziej wytrzymałej konstrukcji, ale o mniejszej dokładności. Rodzaj wagi w danym pomiarze dobieramy do spodziewanej masy ciała. Wagi laboratoryjne mają zwykle dokładność do 10 mg, zaś wagi analityczne do 0,1 mg.

Czułością wagi nazywamy stosunek wychylenia wskazówki do obciążenia wywołującego dane wychylenie. Czułość wagi, jak to wynika z rozważań teoretycznych, jest wprost proporcjonalna do długości ramion i odwrotnie proporcjonalna do odległości pomiędzy punktem podparcia i środkiem ciężkości belki, a także odwrotnie proporcjonalna do masy belki. Im większej wymagamy dokładności tym bardziej czulej potrzebujemy wagi.

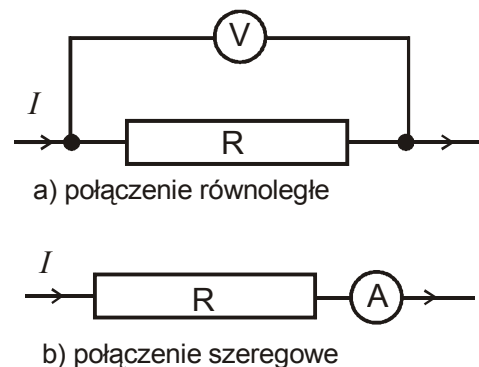


## • Przyrządy elektryczne

We wszystkich pomiarach związanych z elektrycznością używamy przyrządów mierzących głównie natężenie przepływającego prądu w danym miejscu obwodu oraz różnicę potencjałów pomiędzy dwoma wybranymi punktami obwodu. Popularnie mówi się o pomiarze natężenia i napięcia prądu.

Nie będziemy tutaj rozpatrywać zasad budowy mierników elektrycznych — ograniczymy się tylko do pewnych informacji niezbędnych w tego rodzaju pomiarach.

Woltomierz, łączony równolegle z oporem  $R$  (rys. a), jest przyrządem o dużej oporności wewnętrznej (im większa tym lepiej), toteż pomyłkowe włączenie woltomierza do obwodu nie zawsze powoduje jego zniszczenie. Znacznie gorzej jest z amperomierzem, który włączamy do obwodu szeregowo (rys. b), a jego oporność wewnętrzna jest bardzo mała — prąd elektryczny o zbyt dużym natężeniu (większym niż zakres amperomierza) może spowodować jego natychmiastowe zniszczenie. Powinniśmy więc, w miarę możliwości, przewidzieć wielkość mierzonego napięcia bądź natężenia prądu i dobrać przyrząd o odpowiednim zakresie. Pomiar najlepiej rozpocząć od ustawienia przyrządu na maksymalny zakres pomiarowy, a następnie zakres stopniowo zmniejszamy, aż wychylenie wskazówki będzie nie mniejsze niż  $1/3$  skali. Do pomiarów bardzo małych napięć i natężeń prądów używamy mikrowoltomierzy i mikroamperomierzy (lub nawet galwanometrów).



Każdy miernik elektryczny ma zaznaczony rodzaj prądu, do jakiego został przeznaczony (stały czy zmienny) oraz do jakich maksymalnych napięć lub natężeń można go stosować. Ponadto, ma zaznaczoną tzw. klasę przyrządu. Mierniki uniwersalne mają dodatkowe przełączniki pozwalające na używanie ich raz jako amperomierza, a innym razem jako woltomierza, a nawet niektóre można stosować do pomiarów oporności, jeżeli mają podłączone własne źródło prądu (baterię). Coraz częściej na wyposażeniu laboratorium znajdujemy przyrządy cyfrowe. Podają one mierzone wartości prądu w postaci cyfrowej, z dokładnością podaną w instrukcji przyrządu (patrz rozdział 1.3.2).

**Uwaga:** przy pomiarze przyrządem cyfrowym natężenia prądu rzędu kilku amperów czas pomiaru nie powinien przekraczać jednorazowo kilkunastu sekund.

## Zakończenie

Bardziej wyczerpujące omówienie metod i technik stosowanych w laboratoriach fizycznych można znaleźć w innych opracowaniach dotyczących ćwiczeń w pracowni fizycznej, jak np:

Tadeusz Dryński, *Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki*; PWN, Warszawa 1976.

Henryk Szydłowski, *Pracownia fizyczna*; PWN, Warszawa 1994.

G.L. Squires, *Praktyczna fizyka*; PWN, Warszawa 1992.

John R. Taylor, *Wstęp do analizy błęd pomiarowego*; WNT, Warszawa 1995.

Wyżej wymienione książki posłużyły do przygotowania przedstawionego wstępu do pracowni fizycznej w Katedrze Fizyki SGGW.